Les nombres relatifs en écriture fractionnaire

I – Simplification d'écriture fractionnaire :

Propriété :

On ne change pas la valeur d'un quotient de deux nombres relatifs lorsqu'on multiplie (ou divise) ces deux nombres par un même nombre relatif non nul.

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$; $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

avec a, b et k des nombres relatifs, $b \neq 0$, $k \neq 0$

Exemples :

$$\frac{-0,3}{17} = \frac{-0,3 \times 10}{17 \times 10} = \frac{-3}{170}$$

$$\frac{-90}{-24} = \frac{-90 \div (-6)}{-24 \div (-6)} = \frac{15}{4}$$

II – Comparaison de deux fractions – Égalité des produits en croix :

Méthode vue en 5ème : Pour comparer les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec a, b, c et d des nombres relatifs, $b \neq 0$, $d \neq 0$, on les met au même dénominateur puis on compare les numérateurs.

Exemple : Comparer $\frac{-2}{3}$ et $\frac{3}{-5}$

$\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-10}{15}$ et $\frac{3}{-5} = \frac{3 \times (-3)}{-5 \times (-3)} = \frac{-9}{15}$

Donc $\frac{-10}{15} < \frac{-9}{15}$ soit $\frac{-2}{3} < \frac{3}{-5}$

Propriété des produits en croix :

a, b, c et d désignent des nombres relatifs, $b \neq 0$, $d \neq 0$

→ *Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *alors* $a \times d = b \times c$

→ *Si* $a \times d = b \times c$ *alors* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemples :

1) Les fractions $\frac{17}{3}$ et $\frac{289}{51}$ sont-elles égales?

On calcule 17×51 et 3×289 puis on compare les résultats.

$17 \times 51 = \underline{867}$ et $3 \times 289 = \underline{867}$. D'après les produits en croix, les fractions sont égales.

$\frac{17}{3} = \frac{289}{51}$

2) Les quotients $\dfrac{1567}{8842}$ et $\dfrac{4328}{19343}$ sont-ils égaux?

A la calculatrice, $1\,567 \times 19\,343$ = 30 310 481 et $8\,842 \times 4\,328$ = 38 268 176 donc d'après les produits en croix, les quotients sont différents. $\dfrac{1567}{8842} \neq \dfrac{4328}{19343}$

Remarque : Il est possible ici de répondre à la question sans utiliser la calculatrice et sans poser les multiplications.

On cherche le dernier chiffre du produit $1\,567 \times 19\,343$ et le dernier chiffre du produit $4\,328 \times 8\,842$:

7×3 = 21 donc le dernier chiffre du produit $1\,567 \times 19\,343$ est un 1.

8×2 = 16 donc le dernier chiffre du produit $4\,328 \times 8\,842$ est un 6.

Les produits $1\,567 \times 19\,343$ et $4\,328 \times 8\,842$ ne sont donc pas égaux, les quotients $\dfrac{1\,567}{8\,842}$ et $\dfrac{4\,328}{19\,343}$ sont différents.

III – Additions et soustractions :

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur.

$\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$; $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$

avec a, b, c des nombres relatifs, $c \neq 0$

Remarque : Si les dénominateurs ne sont pas les mêmes, on transforme les écritures factionnaires pour les écrire avec le même dénominateur.

Exemples : Calculer puis simplifier.

$$\frac{-2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{-2+4}{7} = \frac{2}{7}$$

$\times(-1)$ $\times 2$ $\div 3$

$$\frac{5}{-6} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{-5-4}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$$

$\times(-1)$ $\times 2$ $\div 3$

$\times 4$ $\times 5$

$$\frac{2}{5} - \frac{-5}{4} = \frac{8}{20} - \frac{-25}{20} = \frac{8-(-25)}{20} = \frac{8+25}{20} = \frac{33}{20}$$

$\times 4$ $\times 5$

IV – Multiplications :

Propriété :

Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire on multiplie les numérateurs entre eux et on multiplie les dénominateurs entre eux.

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$ *avec a, b, c et de des nombres relatifs,* $b\neq 0$, $d\neq 0$

Exemples : Calculer puis simplifier.

$$\frac{5}{-12}\times\frac{2}{7} = \frac{5\times 2}{-12\times 7} = \frac{10}{-84} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{5}{-42} = -\frac{5}{42}$$

$$(-0{,}5)\times\frac{-4}{3} = \frac{-0{,}5}{1}\times\frac{-4}{3} = \frac{-0{,}5\times(-4)}{1\times 3} = \frac{2}{3}$$

Remarques : Le plus efficace pour calculer un produit :
→ on applique la règle des signes d'un produit pour déterminer le signe du produit.
→ on pense à simplifier avant de faire les calculs.

$$\frac{5}{-12}\times\frac{2}{7} = -\frac{5\times\cancel{2}}{6\times\cancel{2}\times 7} = -\frac{5}{6\times 7}$$

$$\frac{15}{-49}\times\frac{-7}{-10} = -\frac{15\times 7}{49\times 10} = -\frac{\cancel{5}\times 3\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times 7\times\cancel{5}\times 2} = -\frac{3}{7\times 2} = -\frac{3}{14}$$

V – Inverse d'un nombre relatif non nul :

Définition :

Deux nombres relatifs non nuls sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

Exemples : $4\times 0{,}25$ = 1 donc 4 et 0,25 sont inverses.
$(-10)\times(-0{,}1)$ = 1 donc -10 et -0,1 sont inverses.

Remarques : 0 n'a pas d'inverse car il n'existe pas de nombre dont le produit par 0 donne 1.
Un nombre relatif et son inverse ont le même signe.

Propriété :

Si a désigne un nombre relatif non nul, l'inverse de a est $\frac{1}{a}$

En effet, $a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$

Exemples : L'inverse de – 4 est $\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$ = - 0,25.

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$

Propriété :

a et b désignent des nombres relatifs non nuls.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ *est* $\frac{b}{a}$

En effet, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{a \times b} = 1$

Exemples : L'inverse de $\frac{7}{-3}$ est $\frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$

L'inverse de $\frac{-1,3}{-9}$ est $\frac{-9}{-1,3} = \frac{9}{1,3} = \frac{90}{13}$

Attention : Ne pas confondre l'inverse d'un nombre avec son opposé.

L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$ = 0,2 et l'opposé de 5 est -5

VI – Quotient :

Propriété :

Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. *Diviser par b revient à multiplier par* $\frac{1}{b}$

avec a et b deux nombres relatifs, $b \neq 0$

Exemples :

$5 \div 8 = 5 \times \frac{1}{8} = 5 \times 0,125 = 0,625$

$-7 \div (-0,5) = -7 \times \frac{1}{-0,5} = -7 \times (-2) = 14$

Propriété :

a, b, c et d désignent des nombres relatifs, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples :

$$\frac{5}{3} \div \frac{7}{2} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{-\frac{7}{3}} = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{6}{35}$$

$$\frac{4}{3} \div 2 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 1}{3 \times \cancel{2}} = \frac{2}{3}$$